TRAVAUX DIRIGES

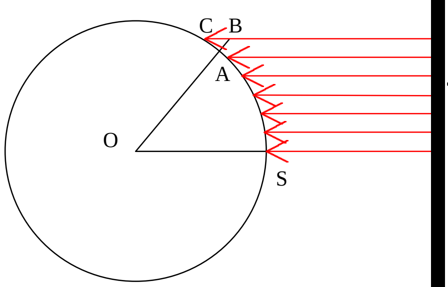
MESURER LA TERRE

-580	**THALES** (-à Milet) considère la terre comme une grande galette, dans une bulle entourée d'eau.
-570	**PYTHAGORE** considère que la terre est ronde comme une boule, parce qu'il s'agit d'une forme "parfaite".
-335	**ARISTOTE** donne des preuves de la rotondité de la terre, en particulier son ombre sur la lune lors d'une éclipse de lune.
-230	**ERATOSTHENE** (à Alexandrie) mesure un méridien et donne une bonne valeur approchée du rayon terrestre.
+400	**ST AUGUSTIN**, en occident, rejette la sphéricité de la terre. C'est une régression jusqu'au X$^{\text{ème}}$ siècle.
IX - XI siècles	Les astronomes et géographes **ARABES** perfectionnent les instruments de mesure et prolongent la tradition grecque.
1670	**PICARD** mesure par triangulation un arc de méridien entre Amiens et Paris.
1669/1716	Les **CASSINI** mesurent un arc de méridien entre Dunkerque et Collioure d'où il ressort que la terre serait aplatie à l'équateur.
	NEWTON déduit du mouvement du pendule à différentes lattitudes l'aplatissement aux pôles.
1736/1743	**MAUPERTUIS** (en Laponie), **BOUGUER** et **LA CONDAMINE** (au Pérou) vérifient, par triangulation, l'aplatissement aux pôles.

1 LA "MESURE DE LA TERRE" PAR ERATOSTHENE

Mesurer un angle et utiliser la proportionnalité

Eratosthène (-275 , -195), conservateur de la célèbre bibliothèque d'Alexandrie, est le premier a obtenir une valeur du rayon terrestre par une méthode réellement scientifique, et ce avec une étonnante précision. L'idée, qui date de Thalès, est de mesurer un angle pour en déduire des rapports de distance.



L'expérience d'Eratosthène :
Eratosthène constata que, le jour du solstice d'été, les puits de Syène (ville de Haute-Egypte) sont, à midi, éclairés jusqu'au fond. Le Soleil est donc, à cet instant, à la verticale de Syène (point S).
Au même instant, un obélisque ([AB]) situé sur une place d'Alexandrie donne une ombre ([AC]) au sol. La mesure de l'angle a = $\widehat{ABC}$ donne a = 7°12'.
D'après les relevés cadastraux de la Bibliothèque, la mesure de l'arc de cercle AS (distance Alexandrie/Syène) est de 5 000 stades (1 stade ≈ 157,5 m).
A partir de ces mesures, Eratosthène put donner une estimation correcte du rayon terrestre.

1) En supposant que les rayons du soleil sont parallèles, montrer que $\widehat{SOA}$ = a.

2) En complétant le tableau de proportionnalité suivant, en déduire la circonférence de la Terre (longueur L du tour de la Terre).

angle	SÔA = 7°12'	360°
arc de cercle	$5000 \times 157{,}5$	L

3) En déduire une estimation du rayon terrestre R.
Comparer à la valeur réelle à l'équateur R = 6378 km. Quelle est, en pourcentage, l'erreur relative commise ?

2 LA "MESURE DE LA TERRE" PAR L'ABBE PICARD
Triangulation

En 1666, **COLBERT** crée l'Académie des sciences. Il est persuadé que de meilleures cartes permettraient d'améliorer la gestion et l'aménagement de la France.
Dès 1668, **l'ABBE PICARD** met en œuvre une opération géodésique de grande envergure. Selon son rapport à l'Académie, "*outre que par ce moyen on aurait une carte la plus exacte qui ait encore été faite, on en tirerait cet avantage de pouvoir <u>déterminer la grandeur de la terre</u>*". Picard se servit des principes de la triangulation, méthode déjà appliquée par le hollandais **SNELLIUS**. Il construisit une **chaîne de treize triangles** en partant d'une **base** mesurée sur le terrain (une deuxième base permettra une vérification) et complétée par des **mesures d'angles** à partir de points visibles les uns des autres (tours, clochers, ...).
Ayant calculé la longueur totale d'un arc de méridien, il ne reste plus qu'à mesurer la latitude aux extrémités pour savoir de quelle fraction de méridien il s'agit.
Picard conçoit lui même ses instruments de mesure et, le premier, va utiliser une lunette munie d'un réticule.

Vous avez ci-jointe, une copie extraite du rapport de Picard "Mesure de la Terre".
1) Dans le triangle ABC, Picard mesure la "base" [AB] et les trois angles.
Soit H le pied de la hauteur issue de A. Calculer AH (en toises).
2) En déduire la valeur de AC et comparer avec celle obtenue par Picard (il y a 6 pieds dans une toise)
3) Justifier l'affirmation finale de Picard "*il a été facile de conclure la distance GE* ".
Effectuer le calcul, en sachant que la toise de Paris est égale à 1,949 m.

CORRIGE

I – MESURE D'ERATOSTHENE :

1) Les droites (OS) et (BC) étant parallèles, elles sont sécantes à (OB) en formant le même angle interne-alterne : $S\hat{O}A = A\hat{B}C = a = 7°12'$.

2) On a, par proportionnalité de l'angle au centre et de l'arc correspondant du cercle :

$$\frac{L}{360} = \frac{5000 \times 157{,}5}{7{,}2}.$$

D'où L = 39 375 km.

3) On a $2\pi R = 39\ 375$
d'où $R \approx 6267$ km.

Cette valeur est très proche de la valeur réelle, l'erreur relative étant :

$$\frac{6378 - 6267}{6378} \approx 0{,}017$$ soit moins de 2 %

(encore qu'on ne soit pas certain de la valeur à attribuer au stade).

II – MESURE DE PICARD :

1) D'après le texte, on a :
AB = 5663 toises, $\hat{A} \approx 54{,}076°$, $\hat{B} \approx 95{,}115°$ et $\hat{C} \approx 30{,}808°$.

Dans le triangle ABH, rectangle en H, on obtient :

AH = AB sin $A\hat{B}H$
= 5663 sin(180° - 95,115)
≈ **5640,4 toises**

2) Dans le triangle AHC, rectangle en H, on peut en déduire :

$$AC = \frac{AH}{\sin \hat{C}} \approx \frac{5640{,}4}{\sin 30{,}808°}.$$

Ainsi **AC ≈ 11 012,9 toises**. On retrouve donc bien les 11 012 toises 5 pieds obtenus par Picard, à un pied près.

2) Pour le calcul de GE, on procède de façon analogue dans le triangle DGE.
Les données sont:
GD = 25 643 toises, DE = 8870,5 toises et $G\hat{D}E = 128{,}158°$.
Soit H le pied de la hauteur issue de G.
On a GH = GD sin(180 – 128,158), puis DH = DG cos(180 – 128,158).

Le théorème de Pythagore dans le triangle GHE, rectangle en H, donne alors GE ≈ 31 895,5 toises c’est à dire **31 895 toises et 3 pieds**.

REFERENCES

❑ Michelle GREGOIRE et Marie-Françoise JOZEAU – La mesure du méridien – Revue Mnémosyne n°12 – Groupe M:A.T.H. – En vente par correspondance à :

IREM Paris VII
Tour 56/55 – 3ème étage
Case 7018
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 .

PICARD – "Mesure de la Terre"

qui ne donnoient les minutes que de six en six, ils n'ont pas laissé d'approcher de la justesse autant qu'il étoit nécessaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux conclusions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoitre le côté AC.

CAB.............54°....4'...35".
ABC.............95.....6....55.
ACB.............30...48....30.
AB........5663..*Toises de mesure actuelle.*
Donc AC......11012..*Toises 5 pieds.*
Et BC.......8954...*Toises.*

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC *&* AD.

DAC.............77°....25'..50".
ADC.............55.......0...10.
ACD.............47.....34.....0.
AC.....11012..*Toises 5 pieds.*
Donc DC.....13121..*Toises 3 pieds.*
Et AD.......9922..*Toises 2 pieds.*

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE *&* CE.

DEC.............74°....9'..30".
DCE.............40...34.....0.
CDE.............65...16...30.
DC.....13121...*Toises 3 pieds.*
Donc DE.......8870...*Toises 3 pieds.*
Et CE.....12389...*Toises 3 pieds.*

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

DCF..........113°....47'...40".
DFC.............33.....40......0.
FDC.............32.....32....20.
DC......13121.....*Toises 3 pieds.*
Donc DF.......21658.....*Toises.*

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la somme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG *&* FG.

DFG...............92°....5'...20".
DGF.............57....34......0.
GDF.............30....20....40.
DF......21658....*Toises.*
Donc DG......25643....*Toises.*
Et FG.......12963....*Toises 3 pieds.*

Ensuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la distance GE entre Malvoisine & Mareuil, sans supposer aucune nouvelle Observation.

PICARD – "Mesure de la Terre"